

Title	有限要素法による非線形安定性解析 (有限要素法の数学的基礎理論)
Author(s)	山田, 嘉昭; 岩田, 耕司
Citation	数理解析研究所講究録 (1975), 241: 182-185
Issue Date	1975-06
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/105564">http://hdl.handle.net/2433/105564</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 有限要素法による非線形安定性解析

東大 生産技術研究所 山田嘉昭

岩田耕司

### 緒言

骨組や板殻構造物のつりあい経路 (equilibrium path) の特色として、弾性範囲内においても、変形が大きくなると荷重と変位の間に線形関係がなくなること、また経路の途上に座屈現象が現われる場合が少なくないことが挙げられる。座屈点 (または臨界点 (critical point)) には極限点 (limit point) と分岐点 (bifurcation point) の2つのタイプがあるが、Thompson<sup>1)</sup> は分岐経路の特徴によって、分岐点をさらに3種類に分類している。このような座屈点を含む構造物の変形挙動を、有限要素法を用いて解析しようとする試みは、主として Thompson らによって確立された摂動法を併用した Walker<sup>2)</sup>, Haftka<sup>3)</sup>, Connor<sup>4)</sup>, Lang<sup>5)</sup>, Hwang<sup>6)</sup> らの論文に見られる。またこれらとは異なった方法で山本<sup>7)</sup> らは球殻、平田<sup>8)</sup> らは円形アーチの問題を解いている。本報告は、一般の骨組や板殻構造物の弾性座屈前後の変形挙動を追跡する有限要素法の数値解析アルゴリズムを確立し、種々の問題にその適用を試みた結果である。解析を進めるに当たって、座屈点での操作は平田<sup>8)</sup> の場合と同様に、微小な固有変形を外乱として与えている。本方法では、各変形段階における剛性マトリックスから、その行列式が0となる点として座屈点を推定し、固有変形は Cholesky 分解を利用したべき乗法 (power method) によって求めている。したがって、通常の増分法の非線形解析プログラムを僅かに修正するだけでよく、いろいろな応用が可能である。

### 1. 幾何学的非線形解析

幾何学的非線形挙動の解析には移動座標系による増分法<sup>9)</sup>を用いることにする。分岐点を含まない滑らかなつりあい経路を増分的に辿る場合、剛性マトリックスとしては通常の線形剛性マトリックス  $[K_0]$  に幾何剛性マトリックス  $[K_G]$  を加えたものを用いればよく、問題は次のようなつりあい方程式を解くことに帰する。

$$\{\Delta p\} + \{r\} = [K] \{\Delta u\} \quad (1)$$

$$[K] = [T]([K_0] + [K_G])[T]^T \quad (2)$$

ここで  $\{\Delta p\}$ ,  $\{r\}$ ,  $\{\Delta u\}$  はそれぞれ荷重増分ベクトル、前段階での不平衡力ベクトル、変位増分ベクトルであり、 $\Delta$  は全体座標系に関するベクトルを表わす。 $[T]$  は局所座標系から全体座標系への変換マトリックスである。

荷重増分法による計算の進め方はつぎのように行なう。外荷重が1個のパラメータ  $\alpha$

により表わされる場合を考えることにすると

$$\{\Delta p'\} = \Delta\alpha \{\bar{p}'\}$$

$\Delta\alpha$  は荷重パラメータの増分を表わし,  $\{\bar{p}'\}$  は外力の分布を示す定値ベクトルである。  
式(3)のように荷重が指定される場合, 式(1)は次のようになる。

$$\Delta\alpha \{\bar{p}'\} + \{r'\} = [K] \{\Delta u'\} \quad (4)$$

荷重パラメータの増分量の決定法は式(4)を次の二式に分けて考える。

$$\{\bar{p}'\} = [K] \{\bar{u}'\}, \quad \{r'\} = [K] \{u_r'\} \quad (5), (6)$$

ただし  $\{\bar{u}'\}$ ,  $\{u_r'\}$  はそれぞれ, 力のベクトル  $\{\bar{p}'\}$ ,  $\{r'\}$  に対して解かれる変位ベクトルである。式(4)~(6)より

$$\{\Delta u'\} = \Delta\alpha \{\bar{u}'\} + \{u_r'\} \quad (7)$$

ここで,  $\{\Delta u'\}$  のある代表成分  $\Delta u_i'$  を前もって設定すれば ( $\Delta u_i' = a$ ),  $\Delta\alpha$  の値が決定できる。すなわち  $\Delta\alpha = (a - u_{ri}') / \bar{u}_i'$  (8)

こうして式(8)の  $\Delta\alpha$  を式(7)に代入すれば変位増分ベクトルの各成分が求められる。  
なお, 式(5)および(6)を解く操作は同時に平行して行なうことができる。

つりあいの基本経路 (fundamental path) と座屈後の経路はこの方法で追跡する。

## 2. 座屈点の決定と座屈直後のつりあい経路

座屈点は剛性マトリックス  $[K]$  の行列式が 0 となる点として求められる。構造物がこのような臨界状態にあるとき式(1)を一意的に解くことはできない。増分法を進める途中で座屈点を検出するには, 図1(a)に示すように  $\det[K]$  を各変形段階ごとに求め, 内挿 (あるいは外挿) によって  $\det[K] = 0$  となる点を推定すればよい。このような座屈点の決定法は文献10にも述べられている。なお,  $\det[K]$  は式(1)を解くときの Cholesky 分解を利用して求められる。

$$\det[K] = \det([L][D][L]^T) = \det[D] \quad (9)$$

ここで  $[L]$  は下三角マトリックス,  $[D]$  は対角マトリックスである。つぎに, 座屈点 C (図1(b)) を通過した直後のつりあい経路を追跡する方法について述べる。  
ただし, ここでは説明を簡単にするため, 式(1)において  $\{r'\} = \{0\}$  とし, また文字につけたダッシュ (') とデルタ ( $\Delta$ ) は省略して表示する。

$$\{p\} = [K]\{u\} \quad (10)$$

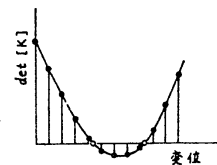
こうして式(10)に次のように直交変換を行なうものとする。

$$\{u\} = [\Phi]\{\xi\}, \quad \{f\} = [\Phi]^T \{p\} \quad (11), (12)$$

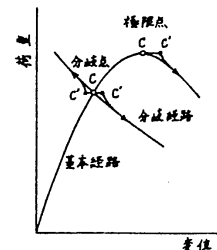
ここで,  $\{\xi\}$  および  $\{f\}$  は新しく変換された変位と力のベクトルである。新しい系では式(10)に対応する式として

$$\{f\} = [K]\{\xi\} \quad (13)$$

が得られる。ただし,  $[K]$  は新しい系での剛性マトリックス



(a)  $\det[K]$  の変化



(b) 荷重-変位曲線

図1. つりあい経路の追跡

に相当し、対角マトリックスをなし、その成分には行列  $[K]$  の固有値  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  が並ぶ。

$$[K] = [\Phi]^T [K] [\Phi] \quad (14)$$

臨界状態にある構造物では次式が成立する。

$$\det [K] = \det [K] = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = 0 \quad (15)$$

このとき少なくとも1個の固有値は0となっている。ここで、式(3)と同様に荷重を1個のパラメータで表わし、 $\lambda_i = 0$ ,  $\lambda_j > 0$  ( $j \neq i$  のすべて) の場合を考える。このとき式(13)を書き下すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \alpha \bar{f}_1 &= \lambda_1 g_1 \\ \alpha \bar{f}_2 &= \lambda_2 g_2 \\ \alpha \bar{f}_i &= 0 \cdot g_i \\ \alpha \bar{f}_n &= \lambda_n g_n \end{aligned} \quad (16)$$

この方程式は  $[K]$  のランクが  $(n-1)$  であり一意の解を得ることができない。摂動法 (perturbation method) あるいは漸近的解法 (asymptotic method) では、さらに高次の関係式を用いて座屈後の経路を決定する。一方、ここで述べる方法は、座屈点において少なくとも式(16)を満足するような外乱

を与えることによって剛性マトリックスのランクの回復を持つものである。具体的には、座屈点で  $\alpha = 0$ ,  $g_i = 0$  ( $i \neq i$  のすべて) とし、 $g_i$  のみ任意の微小な量を与えることにする。この操作は変位  $g_i$  が変換前の系では剛性マトリックス  $[K]$  の固有値  $\lambda_i = 0$  に対応する固有ベクトルとなっているので、ここでは荷重をそのままに保ちながら外乱としてこの微小な固有ベクトルを加えることになる。なお、ここで述べた直交変換は方法の説明上導入したものであり、実際の計算ではこれを行なう必要がないことに注意する。以上の方法によれば、座屈点に関

し、極限点と分岐点の区別なく座屈後の挙動を捉えることが可能となる。図1.(c)はこの操作の説明である。座屈点Cで外乱を与えると平衡は点Cに移り、剛性マトリックスの特異性が避けられる。なお、絶対値最小の固有値 ( $\lambda_i \approx 0$ ) とその固有ベクト

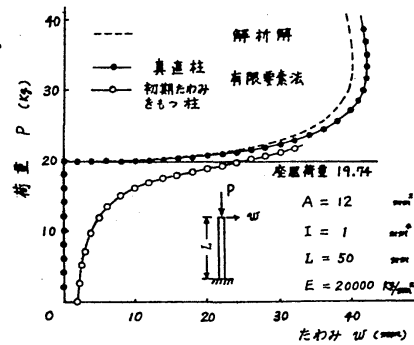


図2. 柱の座屈後の挙動

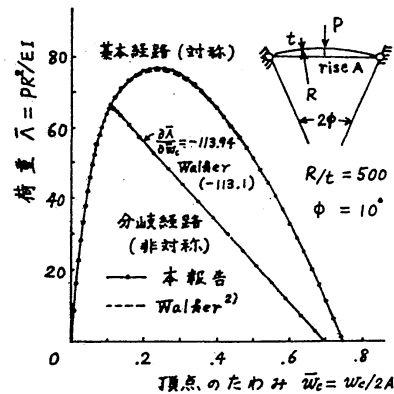


図3. アーチの座屈後のつりあい経路

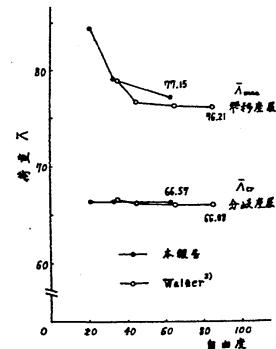


図4. アーチの座屈荷重の収束

ルを、剛性方程式を解く際の *Cholesky* 分解を利用したべき乗法で求めているので、改めてサブルーチンを加えることなく、しかも帯マトリックスの形で取扱うことができる。

### 3. 数値計算例

図2は分岐座屈の典型である真直柱の Euler 座屈を扱ったものである。図ではたわみの十の側を描いているが、一の側にもこれと対称な分岐が可能であることは言うまでもない。図3, 4は円形アーチが頂点に集中横荷重を受けた場合の非対称座屈を扱ったもので、Walker<sup>2)</sup>の摂動法の解との比較がしてある。図5は2個の部材からなる直角フレームの座屈後の挙動を Roorda<sup>11)</sup>の実験結果と比較した。このときの座屈では  $\theta$  の正の方(図5において時計まわり)へ倒れる場合荷重は上昇するが、負の方へ倒れるときには荷重は降下している。図6は全周辺を単純支持した矩形板の圧縮座屈を解析したものである。座屈波形は縦横比が1の場合、縦横とも半波長、 $\frac{1}{2}$ の場合には縦に半波長、横に1波長のものが現われ、座屈後にそれらが成長することを確かめた。ここで計算した座屈荷重と解析解<sup>12)</sup>との相異は、用いた要素分割が粗いことによるものと考えられる。以上の数値例で用いた要素は、真直はり要素および三角形平板要素であり、いずれも軸方向あるいは面内方向1次、横方向あるいは面外方向3次の形状関数を用いている。このうち三角形平板曲げ要素は Bagley<sup>13)</sup>らが最初に提案した非適合要素である。

### 参考文献

- 1) Thompson, J.M.T. : ZAMP, Vol.20, 1969, pp.797-846.
- 2) Walker, A.C. : Int. J. Solids Structures, Vol.5, 1969, pp.97-107.
- 3) Haftka, R.T., Mallett, R.H. and Nachbar, W. : AFFDL-TR-70-130, Vol.1, 1970.
- 4) Connor, J. and Morin, N. : Proc. of Symp. on High Speed Computing of Elastic Structures, Liege, 1970, pp.683-705.
- 5) Lang, T.E. and Hartz, B.J. : ibid, pp.727-757.
- 6) Hangai, Y. and Kawamata, S. : Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, UAP, 1972, pp.473-489.
- 7) 山本, 小久保 : 第7回マトリックス構造解析講演論文集, 1973, PP.357-364.
- 8) 平田, 白沢 : 同上, PP.341-349.
- 9) 山田, 岩田 : 同上, PP.331-340.
- 10) Gallagher, R.H. : Computers & Structures, Vol.3, 1973, pp.543-557.
- 11) Roorda, J. : Proc. ASCE, Vol.91, EML, 1965, pp.87-106.
- 12) Timoshenko, S. and Gere, J.M. : Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, 1961.
- 13) Zienkiewicz, O.C. and Cheung, Y.K. : The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, 1967.

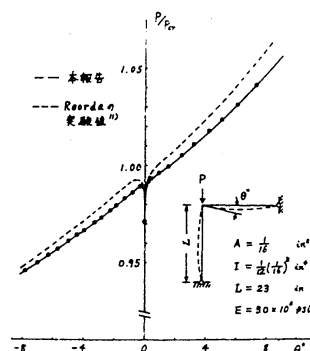


図5. 直角フレームの座屈後の挙動

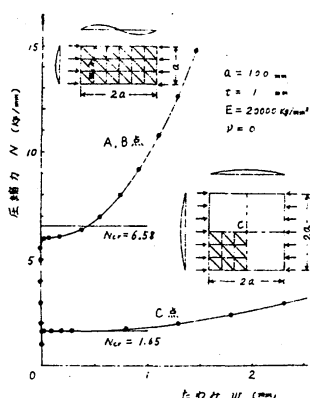


図6. 矩形板の座屈後の挙動